# Three Problems on Harmonic Series in the International Mathematical Olympiad

Juan López Linares, Alexys Bruno-Alfonso and
Grazielle Feliciani Barbosa



September 14, 2019

Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 16, fev. 2020
Edição Ermac

# Três Problemas sobre Série Harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática

Three Problems on Harmonic Series in the International Mathematical Olympiad

**Juan López Linares**
Universidade de São Paulo,
Faculdade de Zootecnia e
Engenharia de Alimentos.
jlopez@usp.br

**Alexys Bruno-Alfonso**
Universidade Estadual Paulista
Júlio de Mesquita Filho,
Faculdade de Ciências de
Bauru, Departamento de
Matemática.
alexys.bruno-
alfonso@unesp.br

**Grazielle Feliciani Barbosa**
Universidade Federal de São
Carlos, Departamento de
Matemática.
grazielle@dm.ufscar.br

## Resumo

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad) é uma competição pré-universitária muito prestigiada. Neste artigo estudamos em detalhe três problemas propostos em anos diferentes e que usam de alguma forma a série harmônica. Os mesmos podem ser incorporados no treinamentos de estudantes de ensino médio ou nas aulas para estudantes universitários. O primeiro foi proposto para a IMO de 2001 e lida com uma desigualdade. A solução do desafio usa o fato da série harmônica crescer ilimitadamente. O segundo foi proposto para a IMO de 1979 e escolhido como primeira pergunta do torneio. Neste caso o foco está em uma soma parcial da série harmônica alternada e é encontrada uma generalização. O terceiro foi proposto para a IMO de 1975 e aprofunda o entendimento da serie harmônica. Retirando uma subsequência infinita a série harmônica continua sendo divergente?
**Palavras-chave:** Ensino Pré-universitário. Olimpíada de Matemática Internacional. Série Harmônica. Sequências. Ensino Universitário.

## Abstract

The International Mathematical Olympiad (IMO) is the most prestigious pre-university math competition. In this article we study in detail three problems proposed in different years and that somehow use the harmonic series. They can be incorporated into the training of high school students for this type of contention or in classes at college level. The first one was proposed for the 2001 IMO and deals with an inequality, that must be shown to be valid for an infinite number of positive integers. The solution considers the fact that the harmonic series grow unlimited. The second one was proposed for the IMO of 1979 and chosen as the first tournament question. In this case the focus is on a partial sum of the alternating harmonic series. A generalization of this problem is found. The third one was proposed for the IMO of 1975 and deepens the understanding of the harmonic series. Taking away an infinite subsequence does the harmonic series remains divergent?
**Keywords:** Pre-university Teaching. International Mathematical Olympiad. Harmonic Series. Sequences. University Teaching.

# 1 Introdução

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad) é uma competição para estudantes do Ensino Médio que é realizada anualmente desde 1959. O único ano em que não ocorreu foi em 1980, devido a conflitos na Mongólia, país que iria sediar o evento (TURNER:1980). Atualmente é a competição de Matemática pré-universitária mais prestigiada (WIKIPÉDIA).

Na IMO cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial (LongList, LL). Os mesmos não podem ter sido usados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos. O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da LL para formar uma lista menor (ShortList, SL). Os professores líderes de cada país participante recebem a SL no primeiro dia da reunião de líderes e escolhem os seis problemas que serão usados no certame.

A delegação do Brasil fez sua primeira participação em 1979 e apresenta uma melhora de desempenho ao longo do tempo. Seu melhor resultado por equipes foi a posição de número 15 (de 109 países) obtido em 2016. Até 2018, de 231 participações, os estudantes brasileiros ganharam 10 medalhas de Ouro, 43 de Prata, 77 de Bronze e 33 Menções Honrosas. Recentemente, em julho de 2019, na cidade de Bath, Inglaterra, o time brasileiro ganhou 2 medalhas de Prata e 4 de Bronze e ficou na 29ª colocação na IMO, empatado com a Turquia (BRASIL-IMO).

Existem poucas publicações em português que exploram em detalhes os tópicos e técnicas usados na resolução de problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. Uma notável exceção era a revista “Eureka!”, mas a mesma não está sendo publicada nos últimos anos (EUREKA!).

A série harmônica é um exemplo de uma sequência dada por uma soma. A Figura 1 ilustra uma demostração com material concreto que pode ser usada em sala de aula para motivar seu estudo. Detalhes do modelo usado e os cálculos de centro de massa que levam à série harmônica podem ser assistidos em uma videoaula (LÓPEZ).


Figura 1: Demostração com material concreto que pode ser usada em sala de aula para motivar o estudo da série harmônica. O livro serve como referência visual da linha vertical. O bloco com rótulo $n = 1$ está fora da mesa. Videoaula com cálculos de centro de massa e outros detalhes em (LÓPEZ).

Num trabalho apresentado no VI Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC) resolvemos três problemas relacionados com Séries Harmônicas (LÓPEZ). Neste artigo revisitamos os mesmos com outros detalhes e generalizações. O primeiro foi proposto para a IMO de 2001 e lida com uma desigualdade, deve-se mostrar que a mesma é válida para um número infinito de inteiros positivos. A solução do desafio usa o fato da série harmônica crescer ilimitadamente. O segundo foi proposto para a IMO de 1979 e escolhido como primeira pergunta da competição. Neste caso o foco está em uma soma parcial da série harmônica alternada e é encontrada uma generalização. O terceiro foi proposto para a IMO de 1975 e aprofunda o entendimento da serie harmônica. Retirando uma subsequência infinita, a série continua sendo divergente?

Devido à criatividade dos proponentes, a resolução dos problemas de Olimpíadas pode levar bastante tempo. Algumas dicas e pontos cruciais estão disponíveis na internet. Entretanto, é preciso fazer um esforço adicional para elaborar resoluções detalhadas e preparar exposições para o treinamento em sala de aula. Concomitantemente, esperamos aumentar a motivação da comunidade regional de professores e estudantes para participar das competições nacionais e regionais de Matemática.

# 2 Desigualdade de Bernoulli e Série Harmônica. SL da IMO 2001 P2

## 2.1 Desigualdade de Bernoulli e Série Harmônica

**Proposição 1** (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Vale que:*

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x > -1\,,\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,. \tag{1}$$

*Demonstração.* Este resultado pode ser provado por indução em $n$. Para $n = 0$ temos

$$1 = (1+x)^0 \geq 1+0\cdot x = 1.$$

Por hipótese de indução suponha o resultado válido para algum $n$

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Como $x > -1$ temos que $1+x > 0$ e

$$(1+x)\cdot(1+x)^n \geq (1+x)\cdot(1+nx),$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot x+nx^2 \geq 1+(n+1)\cdot x,$$

pois $nx^2 \geq 0$. Segue que (1) vale para $n+1$ e, pelo princípio de indução finita, vale para todo $n$. $\square$

Se conhece por "Série Harmônica" a soma de um número infinito de termos da forma $\frac{1}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

Partindo da sequência infinita

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$$

pode ser construída outra sequência infinita chamada "sequência das somas parciais da Série Harmônica"

$$(S_n) = \left(1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \cdots, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}, \cdots\right).$$

Isto é

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

Vamos estudar uma subsequência infinita, $(S_{2^n})$, da sequência $(S_n)$:

$$(S_{2^n}) = (S_1, S_2, S_4, S_8, S_{16}, \cdots, S_{2^n}, \cdots).$$

Considerando que

$$S_1 = 1 \geq 1 + 0\cdot\frac{1}{2},$$

$$S_2 = 1+\frac{1}{2} \geq 1 + 1\cdot\frac{1}{2},$$

$$S_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1+2\cdot\frac{1}{2},$$

$$S_8 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+3\cdot\frac{1}{2},$$

podemos conjeturar que

$$S_{2^n} \geq 1 + n\cdot\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Para concluir a prova por indução em $n$ basta observar que

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq S_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$S_{2^{n+1}} \geq S_{2^n} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2}.$$

Tomando como hipótese de indução que (2) vale para algum $n$ temos que

$$S_{2^{n+1}} \geq 1 + n\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + (n+1)\cdot\frac{1}{2}.$$

Isto é, (2) vale para $n+1$ e, pelo princípio de indução finita, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como a sequência $(n)$ cresce ilimitadamente quando $n$ cresce, a subsequência $(S_{2^n})$ e a sequência $(S_n)$ também crescem ilimitadamente quando $n$ cresce.

## 2.2 SL da IMO 2001 P2

Seja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma sequência infinita e arbitrária de números positivos. Mostrar que a desigualdade

$$1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2} \tag{3}$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos $n$.

A IMO 2001 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos (IMO-OFICIAL). O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia (DJUKIC:2006).

### Solução:

Usaremos a desigualdade de Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad x \in (-1, +\infty),\ n \in \mathbb{N}$$

para substituir $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$. Fazemos $x = \frac{1}{n}$ na desigualdade anterior

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

Segue que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{2}. \tag{4}$$

Como $a_n > 0$ para todo $n$ teremos

$$a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq a_{n-1}\sqrt[n]{2}. \tag{5}$$

Logo, para provar (3), basta mostrar que

$$1 + a_n > a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{6}$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos $n$. Pois nesse caso

$$1 + a_n > a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq a_{n-1}\sqrt[n]{2}$$

e, por transitividade,

$$1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}.$$

A demonstração será feita por contradição. Suponhamos o contrário de (6). Isto é, suponha que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ vale que

$$1 + a_n \leq a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{7}$$

Em outras palavras, o número de termos da sequência $(a_n)$ que satisfaz (6) seria finito.

Dividindo os dois lados de (7) por $n+1$ teremos

$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leq a_{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{a_{n-1}}{n}. \tag{8}$$

Segue que:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{a_n}{n+1}\leq\frac{a_{n-1}}{n}. \tag{9}$$

Somando as desigualdades anteriores quando $n$ muda de $N$ até $m\in\mathbb{N}$, com $m>N$, teremos

$$\sum_{n=N}^{m}\frac{1}{n+1}+\sum_{n=N}^{m}\frac{a_n}{n+1}\leq\sum_{n=N}^{m}\frac{a_{n-1}}{n}. \tag{10}$$

Escrevendo explicitamente os dois últimos somatórios ficará claro que existem muitos termos idênticos que podemos cancelar

$$\sum_{n=N}^{m}\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_N}{N+1}+\frac{a_{N+1}}{N+2}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{m}+\frac{a_m}{m+1}, \tag{11}$$

$$\sum_{n=N}^{m}\frac{a_{n-1}}{n}=\frac{a_{N-1}}{N}+\frac{a_N}{N+1}+\frac{a_{N+1}}{N+2}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{m}.$$

Segue que

$$\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{1}{n+1}\right)+\frac{a_m}{m+1}\leq\frac{a_{N-1}}{N}, \tag{12}$$

$$\frac{a_m}{m+1}\leq\frac{a_{N-1}}{N}-\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{1}{n+1}\right). \tag{13}$$

O somatório que resta na desigualdade anterior lembra a série harmônica que sabemos que cresce ilimitadamente. Consequentemente, deve existir um valor de $m$ a partir do qual $\frac{a_m}{m+1}<0$. E esta é a contradição, pois $a_m>0$ e $m>0$.

# 3 Série Harmônica Alternada. IMO 1979 P1.

## 3.1 IMO 1979 Problema 1

Dado que

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{p}{q},$$

onde $p$ e $q$ são números naturais primos entre si, provar que $p$ é divisível por 1979.

A IMO 1979 foi realizada na cidade de Londres, Reino Unido (IMO-OFICIAL). O problema acima foi proposto pela delegação da antiga Alemanha Ocidental (DJUKIC:2006).

**Solução:**

Seja $S=\frac{p}{q}$ a soma dada:

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}. \tag{14}$$

Notemos que é possível separar os termos com sinais diferentes:

$$S=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{1319}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1318}\right).$$

Somando e subtraindo $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1318}\right)$ encontramos

$$S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1318}\right),$$

$$S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{659}\right),$$

$$S=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\frac{1}{662}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right).$$

A última soma tem 660 termos que vamos dividir em dois somatórios:

$$S=\sum_{i=660}^{989}\frac{1}{i}+\sum_{i=990}^{1319}\frac{1}{i}.$$

Também observamos que $1979-660=1319$ e $1979-989=990$. Isto permite escrever o segundo somatório usando o número 1979.

$$S=\sum_{i=660}^{989}\frac{1}{i}+\sum_{i=660}^{989}\frac{1}{1979-i},$$

$$S=\sum_{i=660}^{989}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{1979-i}\right),$$

$$S=\sum_{i=660}^{989}\frac{1979}{i\,(1979-i)}.$$

Como 1979 é um número primo, $660\leq i\leq 989$ e $990\leq 1979-i\leq 1319$ nenhum dos denominadores dentro do somatório divide o numerador. Logo, quando escrito na forma $S=\frac{p}{q}$ o número $p$ é divisível por 1979.

## 3.2 Generalização do Problema

O número 1979 é primo e correspondeu ao ano da competição. Essa ideia pode ser estendida para outros anos primos?

Lembramos primeiro que um número primo e maior que 3 quando dividido por 6 somente deixa resto 1 ou 5.

A seguir vamos mostrar que existem duas possibilidades: i) o número de parcelas $n$ em $S$ é da forma $4t+3$ com um ano primo $N$ da forma $6t+5$ e ii) o número de parcelas $n$ em $S$ é da forma $4t$ com um ano primo $N$ da forma $6t+1$. Quando o número de parcelas $n$ em $S$ é da forma $4t+1$ ou $4t+2$ não podem ser reproduzidos todos os passos do problema anterior.

- i) Para $n=4t+3$ com $t\geq 0$ inteiro seja

$$S_n=S_{4t+3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{4t+2}+\frac{1}{4t+3}. \tag{15}$$

Separando os termos com o mesmo sinal

$$S_{4t+3} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4t+3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t+2}\right).$$

Somando e subtraindo $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t+2}\right)$ segue que

$$S_{4t+3} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4t+3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2t+1}\right),$$

$$S_{4t+3} = \left(\frac{1}{2t+2} + \frac{1}{2t+3} + \cdots + \frac{1}{4t+3}\right).$$

Temos $2t+2$ parcelas que vamos separar em dois somatórios de $t+1$ parcelas cada

$$S_{4t+3} = \sum_{i=2t+2}^{3t+2} \frac{1}{i} + \sum_{i=3t+3}^{4t+3} \frac{1}{i}.$$

Queremos encontrar um ano primo $N$ tal que

$$\sum_{i=3t+3}^{4t+3} \frac{1}{i} = \sum_{i=2t+2}^{3t+2} \frac{1}{N-i}.$$

Logo

$$N - (2t+2) = 4t+3,$$

$$N - (3t+2) = 3t+3.$$

Isto é,

$$N = 6t+5 \tag{16}$$

e

$$S_n = S_{4t+3} = \sum_{i=2t+2}^{3t+2} \left[\frac{N}{i\,(N-i)}\right].$$

Em 2027 (próximo ano primo da forma $6t+5$) o problema poderia ser formulado assim: Verifique que a soma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1350} + \frac{1}{1351}. \tag{17}$$

é divisível por 2027.

## Solução:

Como $N = 2027$ temos por (16) que $t = 337$. Logo (17) coincide com (15) pois $1351 = 4 \cdot 337 + 3$.

- ii) Para $n = 4t$ com $t \geq 1$ inteiro seja

$$S_n = S_{4t} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4t-1} - \frac{1}{4t}. \tag{18}$$

Separando os termos com o mesmo sinal

$$S_{4t} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4t-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t}\right).$$

Somando e subtraindo $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t}\right)$ segue que

$$S_{4t} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4t}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2t}\right),$$

$$S_{4t} = \left(\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{2t+2} + \cdots + \frac{1}{4t}\right).$$

Temos $2t$ parcelas que vamos separar em dois somatórios de $t$ parcelas cada

$$S_{4t} = \sum_{i=2t+1}^{3t} \frac{1}{i} + \sum_{i=3t+1}^{4t} \frac{1}{i}.$$

Queremos encontrar um ano primo $N$ tal que

$$\sum_{i=3t+1}^{4t} \frac{1}{i} = \sum_{i=2t+1}^{3t} \frac{1}{N-i}.$$

Logo

$$N - (2t+1) = 4t,$$

$$N - 3t = 3t + 1.$$

Isto é,

$$N = 6t + 1 \tag{19}$$

e

$$S_n = S_{4t} = \sum_{i=2t+1}^{3t} \left[\frac{N}{i\,(N-i)}\right].$$

Em 2029 (próximo ano primo da forma $6t+1$) o problema poderia ser formulado assim: Verifique que a soma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1351} - \frac{1}{1352} \tag{20}$$

é divisível por 2029.

**Solução:**

Como $N = 2029$ temos por (19) que $t = 338$. Logo (20) coincide com (18) pois $1352 = 4 \cdot 338$.

Um último comentário, pode ser provado usando a Série de Taylor da função logaritmo natural (conteúdo fora da grade do Ensino Médio) que a soma de um número infinito de termos da série harmônica alternada é $\ln(2)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right] = \ln(2).$$

## 4 Variação da Série Harmônica. SL da IMO 1975 P5

Seja $M$ o conjunto de todos os inteiros positivos que não tem o dígito 9 na base 10. Se $x_1, \cdots, x_n$ é uma sequência de elementos arbitrários e diferentes em $M$, provar que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 80. \tag{21}$$

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgária (IMO-OFICIAL). O problema acima foi proposto pela delegação da Suécia (DJUKIC:2006).

**Solução:**

Sendo que o número de elementos da sequência dada pode ser tão grande quanto se queira e seus elementos são inteiros positivo, o problema propõe um resultado aparentemente contraditório. A forma do somatório lembra uma série harmônica, da qual mostramos que cresce ilimitadamente, porém se pede provar que a mesma é limitada.

A chave para resolver o conflito está na primeira frase. Não são todos os números naturais que entram na soma. Temos que excluir aqueles com pelo menos um dígito nove. Mesmo assim podemos ter a falsa impressão de que os números com 9 na sua representação decimal são raros, e que sua exclusão pouco afetaria a divergência da soma.

Seja $P(k)$ a probabilidade de que um número de $k$ dígitos não tenha nenhum dígito 9. Pelo princípio multiplicativo temos um total de $9 \cdot 10^{k-1}$ números de $k$ dígitos (9 escolhas para o primeiro dígito da esquerda e 10 escolhas para os outros $k-1$ dígitos), dos quais $8 \cdot 9^{k-1}$ não têm nenhum dígito 9 ( 8 escolhas para o primeiro dígito da esquerda e 9 escolhas para os outros $k-1$ dígitos). Logo

$$P(k) = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}.$$

Notamos que quando $k$ cresce $P(k)$ decresce e tende a zero quando $k$ tende a infinito.

Denotemos por $S$ o conjunto dos elementos de $M$ selecionados para calcular a soma dos inversos. Consideremos o conjunto $S_k$ dos elementos de $S$ com $k$ dígitos.

Denotando por $K$ a quantidade de dígitos do maior elemento de $S$, temos que

$$S = \bigcup_{k=1}^{K} S_k \tag{22}$$

Podemos escrever o somatório em (21) como uma soma dupla:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \sum_{x \in S} \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{x \in S_k} \frac{1}{x}. \tag{23}$$

Adicionalmente, sabemos que cada elemento $x$ de $S_k$ satisfaz que $10^{k-1} \leq x < 10^k$. Portanto, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} \leq \sum_{k=1}^{K} \sum_{x \in S_k} \frac{1}{10^{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{K} \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8 \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{9}{10}\right)^k. \tag{24}$$

Para finalizar a resolução, usamos a fórmula da soma da progressão geométrica de razão $q$ com primeiro termo igual a 1, isto é,

$$\sum_{k=0}^{K-1} q^k = \frac{1-q^K}{1-q}. \tag{25}$$

Concluímos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 8 \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{9}{10}\right)^k = 8\,\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^K}{1-\frac{9}{10}} = 80\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^K\right) \tag{26}$$

e, portanto,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 80. \tag{27}$$

**Observações**: Uma vez discutida esta resolução, os professores e estudantes podem propor ou questionar sobre outros métodos de demonstração, sobre uma estimativa do valor da soma dos inversos de todos os elementos de $M$, ou sobre o número mínimo de termos que é preciso considerar para superar, por exemplo, o valor 12. Testes com auxílio do software Mathematica indicam que esse número é 6110520 (mais de 6 milhões!).

# 5 Conclusões

Neste artigo discutimos três problemas que usam de alguma forma a série harmônica e que podem ser incorporados no treinamentos de estudantes de ensino médio para este tipo de certame ou nas aulas para estudantes universitários. O primeiro foi proposto para a IMO de 2001 e lida com uma desigualdade, mostramos que a mesma é válida para um número infinito de inteiros positivos usando o fato da série harmônica crescer ilimitadamente. O segundo foi proposto para a IMO de 1979 e escolhido como primeira pergunta do torneio. Neste caso o foco foi uma soma parcial da série harmônica alternada e discutimos uma generalização. O terceiro foi proposto para a IMO de 1975 e aprofundou o entendimento da serie harmônica. Retirando uma subsequência infinita (números com dígitos nove) a série harmônica deixa de ser divergente. Uma discussão detalhada de outros 23 problemas propostos para as IMOs pode ser encontrada em (LÓPEZ).

# Referências


TURNER, NURA D., A Historical Sketch of Olympiads: U.S.A. and International, **The College Mathematics Journal**, Vol. 16, No. 5 (Nov., 1985), pp. 330-335

WIKIPÉDIA: **International Mathematical Olympiad**,
https://en.wikipedia.org/wiki/International_Mathematical_Olympiad.
Acesso em 14/08/2019.

BRASIL-IMO, **Resultados por equipe e individual do Brasil nas IMOs**,
http://www.imo-official.org/country_team_r.aspx?code=BRA&column=name&order=desc.
Acesso em 14/08/2019.

EUREKA!, **Revista Eureka!**, https://www.obm.org.br/revista-eureka/. Acesso em 14/08/2019.

LÓPEZ J., Videoaula, **Série Harmônica II -V116- Cálculo II FZEA USP**, "Série Harmônica II -V116- Cálculo II FZEA USP", Acesso em 14/08/2019.

LÓPEZ J., BRUNO-ALFONSO A. e BARBOSA G.F., A Série Harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática, **VI Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC)**, Bauru, SP, Brasil, 17-19 de Junho de 2019, https://easychair.org/publications/preprint/wl89. Acesso em 14/08/2019.

IMO-OFICIAL, Sitio oficial das Olimpíadas Internacionais de Matemática,
http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em 14/08/2019.

DJUKIC D. et al., **The IMO Compendium - A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004**, Springer, 2006.
http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf. Acesso em 14/08/2019.

LÓPEZ, J. Problemas Resolvidos sobre Sequências no Treinamento de Estudantes do Ensino Médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT**)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, p. 124, 2019. https://easychair.org/publications/preprint/RsDq. Acesso em 14/08/2019.