



# A Generalized Multifractal Model for Self-similar Traffic Flows in High-speed Computer Networks

---

Ginno Millán

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

March 16, 2021

# A Generalized Multifractal Model for Self-similar Traffic Flows in High-speed Computer Networks

## Un Modelo Multifractal Generalizado para Flujos de Tráfico Autosimilares en Redes de Computadoras

G. Millán

Facultad de Ingeniería y Tecnología  
Universidad San Sebastián  
Puerto Montt, Chile  
ginno.millan@uss.cl

**Abstract**—This paper proposes a new multifractal model with the aim to provide a possible explanation for the locality phenomena to appear in the estimation of the Hurst exponent in stationary second order temporal series, representing the self-similar traffic flows in high-speed computer networks. Analytically it is shown that this phenomenon occurs if the network traffic flows consists of several components with different Hurst exponents.

**Keywords**—Networks, Security and teleinformatics; Self-similarity; Hurst exponent ( $H$ ); Multifractals.

**Resumen**—Este artículo propone un nuevo modelo multifractal, con el ánimo de proveer una posible explicación al fenómeno de localidad que aparece en la estimación del exponente de Hurst en series temporales estacionarias de segundo orden, representativas de los flujos de tráfico autosimilares en las actuales redes de computadoras de alta velocidad. Analíticamente se demuestra que este fenómeno se presenta cuando los flujos de tráfico se componen de diversos tipos de tráfico con diferentes exponentes de Hurst.

**Palabras clave**—redes, seguridad informática y teleinformática, autosimilitud; exponente de Hurst ( $H$ ); multifractales.

### I. INTRODUCCIÓN

Las propiedades que evidencian la naturaleza fractal de los flujos de tráfico en las actuales redes de computadoras de alta velocidad son un tema ampliamente estudiado y reportado en la literatura durante las últimas tres décadas, siendo generalizado el hecho de opinión que sus implicancias en el comportamiento dinámico deben ser cuidadosamente atendidas y consideradas en los análisis de rendimiento y control. Existen, de esta forma, numerosas explicaciones y modelos que intentan responder a este origen autosimilar, ver por ejemplo [1]-[3] y referencias en ellas incluidas.

Reconociendo que las localidades de un proceso fractal solo pueden ser analizadas desde la óptica del análisis multifractal; dada su construcción básica a partir de cascadas multiplicativas capaces de asegurar una caracterización fenomenológica más exacta debido al análisis a altas frecuencias [4], [5], se acepta que los flujos de tráfico de las actuales redes de computadoras de alta velocidad poseen naturaleza multifractal, lo cual origina un nuevo modelo de flujos que pretende explicar el fenómeno de localidad presente en la estimación del exponente de Hurst [3]-[5].

A partir de los resultados obtenidos mediante simulaciones computacionales realizadas en lenguaje MATLAB, se infiere que el modelo contribuye al conocimiento de la dinámica real del tráfico en redes de computadoras de alta velocidad, y puede usarse para simular de manera simple flujos de tráfico realistas.

### II. TRÁFICO AUTOSIMILAR Y TRÁFICO MULTIFRACTAL

Los flujos de tráfico se consideran a menudo representados mediante un proceso autosimilar  $Y(k)$  que satisface

$$Y(k) \stackrel{d}{=} a^{-H} Y(ak), \quad \forall a > 0, k \geq 0, \quad (1)$$

donde  $\stackrel{d}{=}$  es la igualdad de distribuciones finito dimensionales y  $H \in (0, 1)$  es el exponente de Hurst del proceso estocástico autosimilar (H-SS)  $Y(k)$ .

Un proceso H-SS con incrementos estacionarios descrito en términos del comportamiento de sus agregaciones, se obtiene de la multiplexación de incrementos  $X(k) = Y(k+1) - Y(k)$  sobre bloques no superpuestos de tamaño  $n$  según la expresión

$$X^{(n)}(k) = \sum_{j=0}^{n-1} X(kn - j), \quad k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Así, el proceso resultante,  $X^{(n)}(k)$ , tiene distribuciones finito dimensionales similares a  $X(k)$ . Específicamente para cada  $n$  se tiene que

$$X^{(n)}(k) =_d n^H X(k), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

El proceso estacionario  $X(k)$  que cumple con (3) se conoce como proceso estacionario autosimilar H-SSS con exponente de Hurst  $H$ . Un ejemplo es el Ruido Fraccional Gaussiano dado por  $X(k) = B^{(H)}(k+1) - B^{(H)}(k)$ ; único proceso Gaussiano H-SSS conocido [5].

Para estudiar las propiedades estadísticas de  $X^{(n)}(k)$  existen variadas metodologías. En [5] se consideran los cumulantes de las series agregadas, los cuales, en términos de los coeficientes de Taylor de la función generatriz de cumulantes se definen por

$$g(t) = \log E(e^{tX(k)}) = \sum_{m=1}^{\infty} t^m m!^{-1} \text{cum}_m X(k), \quad (4)$$

donde  $\text{cum}_m X(k) = g^{(m)}(0)$ , y [7] demuestra que los cumulantes de  $m$ -ésimo orden de un proceso agregado H-SSS escalan según la ley de potencia

$$\text{cum}_m X^{(n)}(k) = n^{mH_S} \text{cum}_m X(k). \quad (5)$$

Si un proceso cumple con (5) para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ , entonces el logaritmo del módulo de  $\text{cum}_m X^{(n)}(k)$  se comporta de forma tal que sus valores escalan linealmente con los de  $\log n$ , con coeficientes  $mH_S$  que son función lineal de  $m$ . En otras palabras  $mH_S = mH(m)$ , es decir

$$\text{cum}_m X^{(n)}(k) = n^{mH(m)} \text{cum}_m X(k). \quad (6)$$

En [5] se demuestra que una generalización de un proceso autosimilar a un proceso multifractal viene dada como sigue. Un proceso  $X(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , es un proceso multifractal, si

$$\log |\text{cum}_m X^{(n)}(k)| = mH(m) \log n + c(m), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

permitiendo que  $H$  varíe con el orden  $m$ . De hecho, la forma general para  $mH(m)$  está dada por

$$mH(m) = \alpha m + \beta, \quad (8)$$

que corresponde al modelo fractal lineal, donde los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  se determinan directamente durante el proceso de ajuste de los cumulantes, por interpolación. En [8], [9] se demuestra que el único proceso conocido de este tipo tiene la forma

$$mH(m) = m + 2(H_U - 1), \quad (9)$$

y es llamado proceso unifractal.

En la referencia [5] se compara el modelo unifractal con el modelo autosimilar utilizando flujos empíricos. El análisis de las Figuras 3 y 4 de [5] pone de manifiesto que ambos modelos son capaces de capturar las principales tendencias de los flujos reales en la estimación de  $H$ , pero además que ninguno de ellos armoniza con el fenómeno de localidad del exponente de Hurst.

La Fig. 1 ilustra el fenómeno de localidad del exponente de Hurst. Se observa que la pendiente de la curva de ajuste cruza de un valor pequeño a uno notablemente mayor. Por lo tanto la curva se compone de tres partes: un segmento lineal con una pendiente suave cuando  $\log n$  es pequeño, luego un segmento con una pendiente intermedia y, finalmente, un segmento lineal con una pendiente más pronunciada cuando  $\log n$  es grande.

### III. UN MODELO MULTIFRACTAL ADECUADO AL FENÓMENO DE LOCALIDAD

La referencia [10] reporta que el análisis de componentes principales del espectro de valores propios resultante de mezclar señales de movimiento browniano fraccional con diferentes  $H$ , produce un comportamiento biescalar. Este preciso hecho es el que motiva el planteamiento de un modelo de flujo multifractal capaz de reproducir el fenómeno de localidad del exponente de Hurst.

Suponiendo un proceso de flujo de tráfico  $W(k)$ , compuesto por la adición de dos procesos autosimilares independientes,  $X_1(k)$  y  $X_2(k)$ , con exponentes de Hurst definidos por  $H_1$  y  $H_2$ , respectivamente, es decir

$$W(k) = \alpha_1 X_1(k) + \alpha_2 X_2(k), \quad (10)$$

donde  $\text{Var} \{X_1\} = \text{Var} \{X_2\}$  y los coeficientes de escala  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  ( $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ) controlan la varianza de las componentes de (10). Además, sin pérdida de generalidad que  $H_1 < H_2$ .

Según (2) se define el proceso agregado  $Z^{(n)}(k)$  mediante de la multiplexación de los incrementos  $Z(k) = W(k+1) - W(k)$  considerando bloques no superpuestos de tamaño  $n$  como

$$Z^{(n)}(k) = \sum_{j=0}^{n-1} X(kn-j), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Donde, por independencia entre los modelos autosimilar y unifractal se verifica que

$$|\text{cum}_m Z^{(n)}(k)| = |\text{cum}_m (\alpha_1 X_1^{(n)}(k) + \alpha_2 X_2^{(n)}(k))|, \quad (12)$$

es decir,

$$\begin{aligned} |\text{cum}_m Z^{(n)}(k)| &= c_1(m) n^{mH_1(m)} + c_2(m) n^{mH_2(m)} \\ &= c_1(m) n^{m+2(H_1(m)-1)} + c_2(m) n^{m+2(H_2(m)-1)}, \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $c_1(m)$  y  $c_2(m)$  son determinados por los coeficientes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , respectivamente.

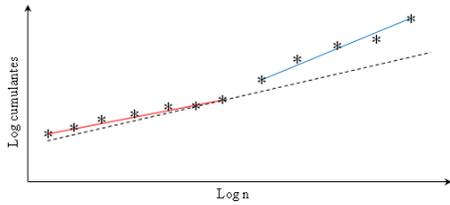


Figura 1. Ilustración del fenómeno de localidad del exponente de Hurst.

Luego, si  $c_1(m) > c_2(m)$ , existe una única solución positiva  $n^*$  para la ecuación en términos de la variable  $n$  dada por

$$c_1(m)n^{m+2(H_1(m)-1)} = c_2(m)n^{m+2(H_2(m)-1)}. \quad (14)$$

Así, resulta fácil verificar que

$$\left| \text{cum}_m Z^{(n)}(k) \right| = \begin{cases} c_1(m)n^{m+2(H_1(m)-1)}, & \text{para } n \ll n^* \\ c_2(m)n^{m+2(H_2(m)-1)}, & \text{para } n \gg n^* \end{cases}. \quad (15)$$

Para cada  $m$  la gráfica en escala logarítmica del cumulante de  $m$ -ésimo orden de  $Z^{(n)}(k)$  consiste en tres segmentos: un primer segmento lineal con pendiente  $m + 2(H_1 - 1)$  cuando  $n$  es pequeño; un segundo segmento de transición intermedia (a menudo muy corto) y, finalmente, un segmento lineal con una pendiente  $m + 2(H_2 - 1)$  cuando  $n$  es grande. Por lo tanto, se coloca en evidencia el fenómeno de localidad del exponente de Hurst.

La Fig. 2 expone el fenómeno de localidad del exponente de Hurst para una serie FGN generada espectralmente [11] con  $H = 0.6$ , mientras que la Fig. 3 lo hace para una serie FGN con  $H = 0.8$  también generada espectralmente. Finalmente, la Fig. 4 muestra el comportamiento multiplexado de ambas series con  $\alpha_1 = \alpha_2$  en la aplicación de (13).

Con todo lo anterior se demuestra de forma simple que si un proceso de flujo se forma de dos componentes autosimilares aditivos independientes con diferentes exponentes de Hurst, se observa el fenómeno de localidad en la estimación de  $H$  usando cumulantes. No resulta difícil extender este modelo al caso de más de dos componentes.

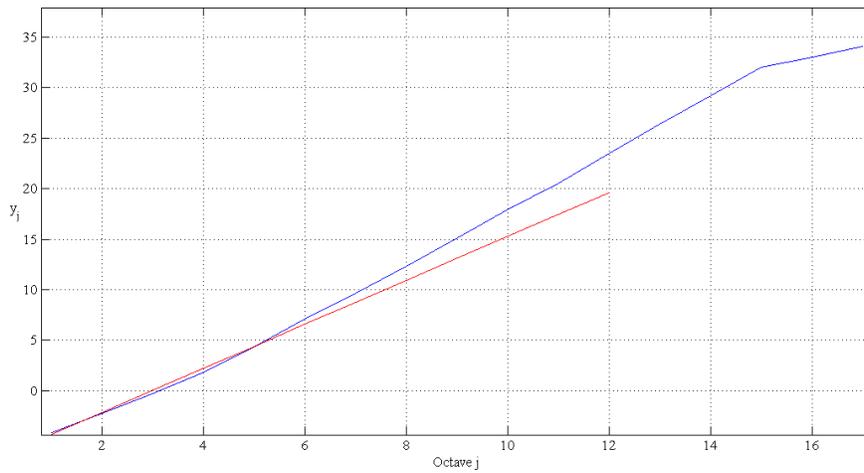


Figura 2. Fenómeno de localidad en una serie FGN con  $H = 0.6$  generada espectralmente.

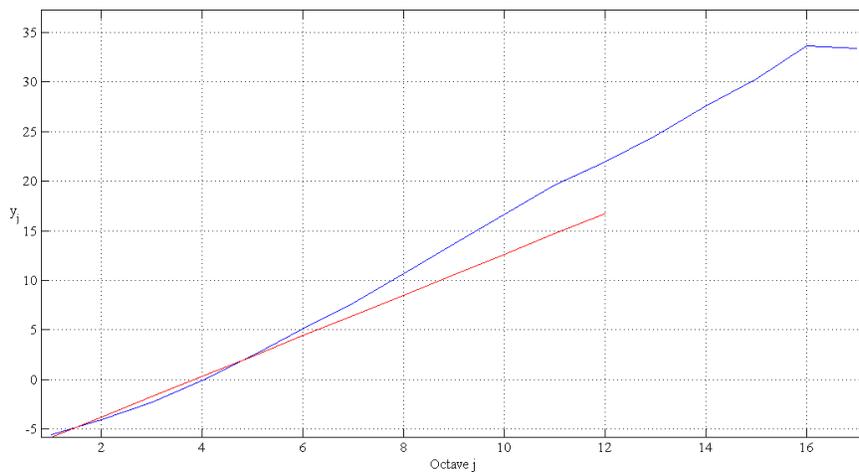


Figura 3. Fenómeno de localidad en una serie FGN con  $H = 0.8$  generada espectralmente.

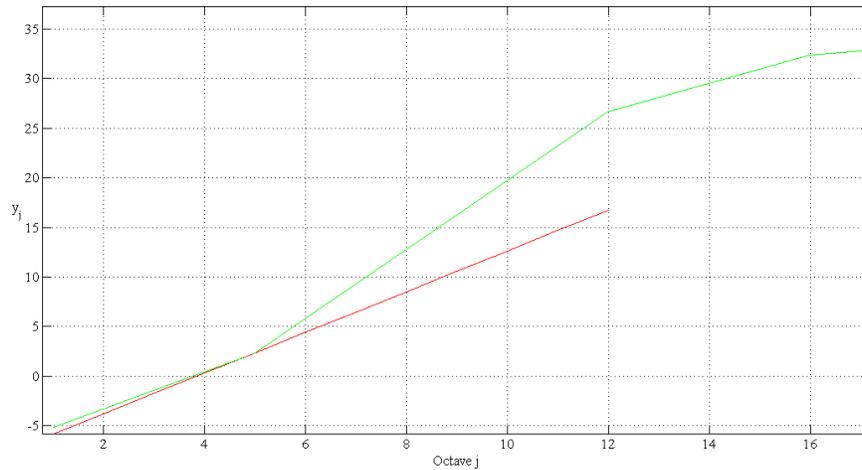


Figura 4. Fenómeno de localidad observado en el comportamiento conjunto de las series anteriores.

#### IV. CONCLUSIONES

Resulta interesante observar que la inconsistencia teórica de un único valor del exponente de Hurst y que el fenómeno de localidad, pueden ser resueltos empleando un simple modelo que adiciona series temporales autosimilares de segundo orden. Por otra parte, es posible generar varios procesos con diferentes exponentes de Hurst, empleando para ello cualquiera de los métodos existentes para la generación de series autosimilares de segundo orden y luego adicionarlos. Esto está de acuerdo con la conclusión de [12], que establece que es necesaria la multiplexación de diversas fuentes de tráfico para alcanzar un tipo de simulaciones más apropiadas para los flujos de tráfico en redes de computadoras.

La gran mayoría de los modelos anteriores que tratan los orígenes de la autosimilitud de los flujos de tráfico en las redes de alta velocidad, pueden ser adoptados, desde la perspectiva de su aplicación al modelo propuesto en esta investigación, con el objetivo de recalcar la coexistencia en los flujos reales, de múltiples componentes autosimilares heterogéneos. Puede así afirmarse que si en el modelo On/Off original de [13] se supone la existencia de dos valores diferentes para los exponentes de Pareto que controlan las distribuciones los periodos On y los periodos Off de las fuentes, entonces el proceso de flujo final agregado presentará dos componentes diferentes en términos de sus exponentes de Hurst y, por lo tanto, dará cuenta efectiva del fenómeno de localidad del exponente de Hurst.

En general, para redes de grandes coberturas, es decir con topologías muy complejas, el canal de datos es compartido por múltiples fuentes en una forma que, aproximadamente, puede ser considerada independiente y aditiva. Debido entonces a la diversidad de las fuentes y los mecanismos de transferencia, el flujo que ingresa proveniente de cada fuente posee diferentes exponentes de Hurst. Esto lleva de manera natural a plantear la siguiente conjetura: “es más probable observar el fenómeno de localidad en flujos de tráfico de redes troncales que locales”.

Finalmente, se considera útil este trabajo porque un modelo de flujos de tráfico en redes de computadoras de alta velocidad más preciso y simple, permite mejoras cualitativas sustanciales en el rendimiento de las mismas.

#### AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo brindado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile (CONICYT), a través del programa de formación de capital humano avanzado en su modalidad de becas para estudios de Doctorado en Chile. De igual manera a la Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación (VRID) de la Universidad de Santiago de Chile por el apoyo brindado para el desarrollo de esta investigación.

#### REFERENCIAS

- [1] G. Millán, H. Kaschel, and G. Lefranc, “Discussion of the analysis of self-similar teletraffic with long-range dependence (LRD) at the network layer level,” *Int. J. Comput. Commun.*, vol. V no. 5, pp. 799-812. Dec. 2010.
- [2] Y.-D. Chen, L. Li, Y. Zhang, and J.-M. Hu, “Fluctuations and pseudo long range dependence in network flows: a non-stationary Poisson process model,” *Chinese Physics B*, vol. 18 no 4, pp. 1373-1379. Apr. 2009.
- [3] G. Millán, H. Kaschel, and G. Lefranc, “A simple model for the generatio of LRD self-similar traffic using piecewise affine chaotic one-dimensional maps”. *Stud. Inform. Control*, vol. 19 no. 1, pp. 67-78. Mar. 2010.
- [4] G. Millán, R. Osorio-Comparán, and G. Lefranc, “Preliminaries on the accurate estimation of the Hurst exponent using time series,” *arXiv preprint*, arXiv: 21.03.02091, 2021,
- [5] G. Millán and G. Lefranc, “Application of the analysis of self-similar teletraffic with long-range dependence (LRD) at the network layer level,” *International Journal of Computers, Communications & Control*, vol. 10 no. 1, pp. 62-69. Nov. 2014.
- [6] O. I. Sheluhin, S. M. Smolskiy, and A. V. Osin, *Self-Similar Processes in Telecommunications*, UK.: Wiley, 2007.
- [7] G. Terdik, “Bilinear stochastic models and related problems of nonlinear time series analysis: a frequency approach,” *Lectures Notes in Statistics*, vol. 142, New York: Springer-Verlag, 1999.
- [8] E. Iglói and G. Terdik, “Superposition of diffusions with linear generator and its multifractal limit process,” *ESAIM-Probab. Stat.* vol. 7, pp. 23-88, May. 2003.
- [9] S. Molnár and G. Terdik, “A general fractal model of Internet traffic,” in *Proc. 26th Annu. IEEE Conf. Local Computer Networks*. Tampa, FL, 2001, pp. 492-499.
- [10] L. Li, J. Hu, Y. Chen, and Y. Zhang, “PCA based Hurst exponent for fBm signals under disturbances,” *IEEE Trans. Signal Process*, vol. 57 no. 7, pp. 2840-2846, Jul. 2009.

- [11] P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, and D. Veitch, "Self-similarity and long-range dependence through the wavelets lens," in *Theory and Applications of Long-Range Dependence*, P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. S. Taqqu, Eds. Boston, MA: Birkhäuser, 2003, pp. 527-556.
- [12] G. Horn, A. Kvalbein, J. Blomsköld, and E. Nilsen, "An empirical comparison of generators for self-similar simulated traffic," *Perform. Evaluation*, vol. 64, no. 2, pp. 162-190, Feb. 2007.
- [13] W. Willinger, M. S. Taqqu, R. Sherman, and D. V. Wilson, "Self-similarity through high-variability: statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level," *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 5, no. 1, pp. 71-86. Feb. 1997.
- [14] G. Millán, G. Fuertes, M. Alfaro, R. Carrasco, and M. Vargas, "A simple and fast algorithm for traffic flow control in high-speed computer networks," 2018 IEEE International Conference on Automation/XXII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA).